

Zestaw zadań: Wyznaczanie dziedziny funkcji

Poziom rozszerzony – Funkcje wymierne, pierwiastkowe i logarytmiczne

Przypomnienie teoretyczne (Warunki wyznaczania dziedziny)

Wyznaczając dziedzinę funkcji $f(x)$, musimy uwzględnić następujące obostrzenia matematyczne:

1. **Mianownik ułamka:** Jeśli we wzorze występuje $\frac{P(x)}{Q(x)}$, to $Q(x) \neq 0$.
2. **Pierwiastek stopnia parzystego:** Jeśli występuje $\sqrt{P(x)}$, to $P(x) \geq 0$.
3. **Logarytm:** Jeśli występuje $\log_{a(x)} b(x)$, to:
 - argument logarytmu: $b(x) > 0$
 - podstawa logarytmu: $a(x) > 0$ oraz $a(x) \neq 1$

W przypadku nałożenia kilku warunków jednocześnie, dziedziną funkcji jest **część wspólna (iloczyn zbiorów)** wszystkich otrzymanych warunków.

Zadanie 1. (Funkcje wymierne i pierwiastkowe)

Wyznacz dziedzinę następujących funkcji. Pamiętaj o zapisaniu odpowiednich założeń.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

d) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+3}}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$

Zadanie 2. (Funkcje logarytmiczne – stała podstawa)

Wyznacz dziedzinę funkcji logarytmicznej, rozwiązując odpowiednie równania lub nierówności.

a) $f(x) = \log_3(2x - 8)$

c) $f(x) = \ln(4 - |x|)$

b) $f(x) = \log_{0.5}(x^2 - 5x + 6)$

d) $f(x) = \log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$

Zadanie 3. (Funkcje logarytmiczne – zmienna podstawa)

Uwzględnij warunki dla argumentu oraz dla podstawy logarytmu, aby wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log_{x-2}(x^2 - 9)$

b) $f(x) = \log_{2x-1}(x^2 - 5x + 4)$

c) $f(x) = \log_{x+3}(|x| - 2)$

Zadanie 4. (Zadania hybrydowe / złożone)

Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = \sqrt{\log_2(x - 3)}$

b) $f(x) = \log_x(4 - x^2) + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

c) $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(x + 1)}$